

19. Модели процессов авторегрессии и скользящего среднего: AR(p), MA(q) и ARMA(p,q). Условия стационарности этих процессов.

Процесс авторегрессии порядка p (AR(p)) определяется соотношениями

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \dots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad a_p \neq 0,$$

где ε_t - процесс белого шума с $D(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$.

$Cov(X_{t-s}, \varepsilon_t) > 0$ для всех $s > 0$.

При рассмотрении процессов авторегрессии и некоторых других моделей удобно использовать **оператор запаздывания L (lag operator)**, который воздействует на временной ряд и определяется соотношением

$$LX_t = X_{t-1}$$

Если оператор запаздывания применяется k раз, что обозначается как L^k , то это дает в результате

$$L^k X_t = X_{t-k}$$

Тогда процесс авторегрессии p -го порядка перепишется в виде:

$$a(L)X_t = \varepsilon_t$$

где

$$a(L) = 1 - (a_1 L + a_2 L^2 + \dots + a_p L^p).$$

Для того, чтобы такой процесс был стационарным, все корни алгебраического уравнения $a(z) = 0$ должны лежать вне единичного круга, т.е. $|z| > 1$.

Процесс скользящего среднего порядка q ($MA(q)$) определяется соотношениями:

$$X_t = \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2} + \dots + b_q\varepsilon_{t-q} + \mu, \quad b_q \neq 0,$$

Используя оператор запаздывания L , $MA(q)$ можно переписать в следующем виде:

$$X_t - \mu = b(L)\varepsilon_t,$$

где $b(L) = 1 + b_1L + b_2L^2 + \dots + b_qL^q$.

Всякий стационарный процесс $AR(p)$ эквивалентен $MA(\infty)$.

Если корни $b(z) = 0$ лежат вне единичного круга, то ряд обратим, т.е. $MA(q)$ эквивалентен $AR(\infty)$.

Смешанный процесс авторегрессии – скользящего среднего (процесс авторегрессии с остатками в виде скользящего среднего) (ARMA(p,q)) определяется соотношениями:

$$X_t = a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \dots + a_pX_{t-p} + \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + \dots + b_q\varepsilon_{t-q}, \quad a_p \neq 0, \quad b_q \neq 0, \quad \varepsilon_t - \text{белый шум}$$

В операторной форме это соотношение имеет вид

$$\begin{aligned} a(L) &= 1 - (a_1L + a_2L^2 + \dots + a_pL^p) \\ b(L) &= 1 + b_1L + b_2L^2 + \dots + b_qL^q \\ a(L)X_t &= b(L)\varepsilon_t, \end{aligned}$$

т.е. $a(L)$ и $b(L)$ имеют тот же вид, что и в определенных ранее моделях $AR(p)$ и $MA(q)$.

Процесс стационарен, если все корни уравнения $a(z) = 0$ лежат вне единичного круга $|z| \leq 1$

Если все корни уравнения $b(z) = 0$ лежат вне единичного круга $|z| \leq 1$ (**условие обратимости**), то существует эквивалентное представление процесса X_t в виде процесса авторегрессии бесконечного порядка $AR(\infty)$.